Inspectoratul Şcolar al Municipiului Bucureşti

Olimpiada de Matematică
Faza locală, 17 februarie 2007
Clasa a XI-a

Subiectul I

Considerăm determinanţii cu elemente numere reale:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \\ d_1 & d_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 1 \\ d_1 & d_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Se ştie că trei dintre ei sunt egali cu 1. Demonstraţi că:

a) şi cel de-al patrulea este egal cu 1;

b) $a_1 + c_1 = b_1 + d_1$ şi $a_2 + c_2 = b_2 + d_2$.

Subiectul II

Fie ecuaţia $X^2 + aX + bI_n = O_n$, $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, unde $a, b, n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$.

a) Demonstraţi că în cazul $n = 2$ ecuaţia are o infinitate de soluţii, oricare ar fi a, b.

b) Pentru care valori ale lui n este adevărat că ecuaţia are o infinitate de soluţii, oricare ar fi a, b ?

Subiectul III (Gazeta Matematică)

Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x}{e^{[\ln x]}}$. (aici $[t]$ reprezintă partea întreagă a numărului real t)

a) Determinaţi punctele de acumulare ale domeniului de definiţie în care funcţia nu are limită.

b) Demonstraţi că pentru orice $a \in [1, e]$ există un subşir al şirului $\big(f(n)\big)_{n \geq 1}$ cu limita a.

Subiectul IV

Fie $a \in [0, 1)$ un număr scris în formă zecimală. Construim un şir $(x_n)_{n \geq 1}$ astfel: x_1 se obţine permutând în mod arbitrar primele trei zecimale ale lui a, x_2 se obţine permutând în mod arbitrar zecimalele a doua, a treia şi a patra ale lui x_1 şi, în general, x_{n+1} se obţine permutând în mod arbitrar zecimalele $n + 1, n + 2$ şi $n + 3$ ale lui x_n, $\forall n \geq 1$.

a) Arătaţi că orice şir astfel construit este convergent către o limită b.

b) Este posibil ca a să fie raţional şi b să fie iraţional ?

c) Găsiţi un a pentru care orice şir $(x_n)_{n \geq 1}$, construit ca mai sus, are limită iraţională.

Fiecare subiect se notează de la 1 la 10. Timp de lucru: 3 ore